Esercizi su stimatori

1. Considerato un campione casuale semplice di tre elementi estratto con ripetizione, si determini valore atteso e varianza del seguente stimatore del parametro μ

$$T = X_1 - \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$

si verifichi se lo stimatore è corretto e consistente

Soluzione

$$E(T) = E(X_1) - \frac{1}{4}E(X_2) + \frac{1}{4}E(X_3) = \mu - \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{4}\mu = \mu$$

quindi lo stimatore è corretto

$$V(T) = V(X_1) + \frac{1}{16}V(X_2) + \frac{1}{16}V(X_3) = \sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 = \frac{18}{16}\sigma^2$$

quindi lo stimatore non è consistente, dato che la sua varianza non tende a zero per una numerosità campionaria che tende a infinito

2. Considerato un campione casuale semplice di due elementi estratto con ripetizione, si determini se i seguenti stimatori del parametro μ sono corretti e si determini quello più efficiente

$$T_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$$
$$T_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

Soluzione

$$E(T_1) = \frac{2}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) = \frac{2}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \mu$$

$$E(T_2) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu$$

Entrambi gli stimatori sono quindi corretti e il confronto sull'efficienza si baserà sul valore delle varianze dei due stimatori.

$$V(T_1) = \frac{4}{9}V(X_1) + \frac{1}{9}V(X_2) = \frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 = \frac{5}{9}\sigma^2 = 0.\bar{5}\sigma^2$$

$$V(T_2) = \frac{1}{4}V(X_1) + \frac{1}{4}V(X_2) = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{2}{4}\sigma^2 = 0.5\sigma^2$$

Dato che risulta

$$V(T_2) < V(T_1)$$

si conclude che T_2 è più efficiente di T_1

3. Considerato un campione casuale semplice di 10 elementi estratto con ripetizione, si determini se i seguenti stimatore del parametro μ

$$T_1 = \frac{X_1 + X_3 + X_5}{3}$$

$$T_2 = \frac{X_1 + 2X_5 + X_{10}}{4}$$

$$T_3 = \frac{X_2 + 2X_4 + 3X_6 + 2X_8 + X_{10}}{5}$$

sono corretti, se ne calcoli l'errore quadratico medio supponendo che σ^2 sia pari a 5 e si individui quello più efficiente

Soluzione

$$E(T_1) = \frac{E(X_1) + E(X_3) + E(X_5)}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu$$

$$E(T_2) = \frac{E(X_1) + 2E(X_5) + E(X_{10})}{4} = \frac{4\mu}{4} = \mu$$

$$E(T_3) = \frac{E(X_2) + 2E(X_4) + 3E(X_6) + 2E(X_8) + E(X_{10})}{5} = \frac{9}{5}\mu$$

I primi due stimatori sono corretti, mentre il terzo è distorto.

L'errore quadratico medio dei primi due stimatori coincide quindi con la loro varianza, mentre per determinare l'errore quadratico medio di T_3 occorre determinare la sua distorsione e sommare il quadrato di tale distorsione alla varianza dello stimatore

Risulta quindi

$$MSE(T_1) = V(T_1) = \frac{V(X_1) + V(X_3) + V(X_5)}{9} = \frac{3\sigma^2}{9} = \frac{15}{9} = 1.\bar{6}$$

$$MSE(T_2) = V(T_2) = \frac{V(X_1) + 4V(X_5) + V(X_{10})}{16} = \frac{6\sigma^2}{16} = \frac{30}{16} = 1.875$$

$$V(T_3) = \frac{V(X_2) + 4V(X_4) + 9V(X_6) + 4V(X_8) + V(X_{10})}{25} = \frac{19\sigma^2}{25} = \frac{95}{25} = 3.8$$

$$B(T_3) = \frac{9}{5}\mu - \mu = \frac{4}{5}\mu$$

$$MSE(T_3) = 3.8 + \frac{16}{25}\mu^2$$

Lo stimatore più efficiente è quindi il primo, in quanto

$$MSE(T_1) < MSE(T_2) < MSE(T_3)$$

4. Considerata una popolazione in cui la variabile Z si distribuisce come una variabile Zero-Uno di parametro ignoto π, si verifichi se la seguente funzione dei dati campionari

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n+1}$$

è uno stimatore corretto e consistente di π mediante il calcolo dell'errore quadratico medio

Soluzione

Il valore atteso dello stimatore è pari a

$$E(T) = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n+1} = \frac{n\pi}{n+1}$$

Lo stimatore, quindi, non è corretto, ma è asintoticamente corretto, dato che

$$\lim_{n\to\infty} E(T) = \pi$$

La sua distorsione risulta pari a

$$B(T) = \frac{n\pi}{n+1} - \pi = \frac{n\pi - (n\pi + \pi)}{n+1} = -\frac{\pi}{n+1}$$

e quindi tende a zero per n che tende a infinito

$$\lim_{n\to\infty} B(T) = 0$$

La varianza è data da

$$V(T) = \frac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{(n+1)^2} = \frac{n\pi(1-\pi)}{(n+1)^2}$$

e quindi tende a zero per n che tende a infinito

$$\lim_{n\to\infty} V(T) = 0$$

In conclusione, si ha

$$MSE(T) = \frac{n\pi(1-\pi)}{(n+1)^2} + \frac{\pi^2}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2 + n\pi(1-\pi)}{(n+1)^2}$$

Dato che l'errore quadratico medio dello stimatore tende a zero per n che tende a infinito

$$\lim_{n\to\infty} MSE(T) = 0$$

lo stimatore è consistente

5. Data una popolazione normale $N(\mu, \sigma^2)$ si determini la distribuzione del seguente stimatore di μ

$$T = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} X_i + \frac{1}{2(n-3)}\sum_{i=4}^{n} X_i$$

Soluzione

Una combinazione di v.c. normali ha ancora una distribuzione normale.
I parametri che caratterizzano tale distribuzione sono

$$E(T) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3} E(X_i) + \frac{1}{2(n-3)}\sum_{i=4}^{n} E(X_i) = \frac{3\mu}{6} + \frac{(n-3)\mu}{2(n-3)} = \mu$$

$$V(T) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{3} V(X_i) + \frac{1}{4(n-3)^2}\sum_{i=4}^{n} V(X_i) = \frac{3\sigma^2}{36} + \frac{(n-3)\sigma^2}{4(n-3)^2} =$$
$$= \frac{\sigma^2}{12} + \frac{\sigma^2}{4(n-3)} = \frac{(n-3)\sigma^2 + 3\sigma^2}{12(n-3)} = \frac{n\sigma^2}{12(n-3)}$$

Pertanto

$$T \sim N\left(\mu, \frac{n\sigma^2}{12(n-3)}\right)$$