

Esempio

In un paese è noto che la statura media degli abitanti è 175 cm. Sulla base di cambiamenti nello stile di vita un ricercatore ipotizza una sua variazione in 178 cm. Assumendo che la v.c. statura sia distribuita come una normale, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con varianza nota ed utilizzando la statistica media campionaria consideriamo sotto l'ipotesi nulla la statistica test:

$$Z = \frac{\bar{X} - 175}{\sigma / \sqrt{n}} \quad N(0,1)$$

a seconda della ipotesi alternativa si hanno le seguenti regioni di rifiuto:

$$H_1 : \mu > 175 \quad Z \geq z_\alpha$$

$$H_1 : \mu < 175 \quad Z \leq -z_\alpha$$

$$H_1 : \mu \neq 175 \quad |Z| \geq z_{\alpha/2}$$

es. per $\sigma^2 = 300$ e per $n=20$ avessimo $\bar{x}=177,5$

$$z = \frac{177,5 - 175}{\sqrt{300 / 20}} = 0.645$$

con un livello $\alpha=0.05$ i valori critici sarebbero $z_\alpha=1.645$ e $z_{\alpha/2}=1.96$.

In nessuno dei casi si potrebbe rifiutare l'ipotesi nulla.

Test per la media - esempio

Test sulla statura media in un collettivo:

$$H_0 : \mu = 175 \text{ contro } H_1 : \mu > 175$$

Si assume che la statura sia una variabile casuale $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
con varianza ignota.

Si estrae un campione di 10 giovani e si trova:

$$\bar{x} = 181,5$$

$$S^2 = 95,5067$$

$$t = \frac{181,5 - 175}{\sqrt{95,5067/10}} = 2,103$$

Ponendo $\alpha = 0,05$ si ottiene dalla t-Student con 9 gradi di libertà:

$$t_{0,05} = 1,8331$$

e quindi si rifiuterà l'ipotesi nulla poiché $t \geq 1,8331$

Test per una proporzione - esempio

Si vuole verificare che nel 2002 la percentuale degli occupati in Italia nel settore agricolo è la stessa del 1991 pari a 8,4%:

$$H_0 : \pi = 0,084 \text{ contro } H_1 : \pi \leq 0,084$$

Si estrae un campione di 1000 occupati.

Dei mille estratti, 53 sono occupati nel settore agricolo, pertanto:

Il valore della statistica test è: $\bar{x} = 0,053$

Ponendo $\alpha = 0,01$ si ottiene dalla normale standardizzata:

$$z = \frac{0,053 - 0,084}{\sqrt{(0,084)(0,916)/1000}} = -3,534 \qquad -z_{0,01} = -2,326$$

e quindi si rifiuterà l'ipotesi nulla poiché $z < -2,326$

Il p-value corrispondente al valore osservato della statistica test è 0,0002. Tale valore mostra una forte evidenza contro l'ipotesi nulla.

Test per la varianza - esempio

Si ipotizzi che la spesa delle famiglie sia una variabile casuale Normale. Si vuole verificare:

$$H_0 : \sigma^2 = 22500 \text{ contro } H_1 : \sigma^2 \neq 22500$$

Si estrae un campione di 61 famiglie.

Dal campione, si osservano: $\bar{x} = 2010$ $S^2 = 20000$

Il valore della statistica test è: $\frac{60 \cdot 20000}{22500} = 53,33$

Ponendo $\alpha = 0,05$ si ottiene dal Chi-quadrato con $n-1=60$ gradi di libertà:

$$\chi^2_{0,975} = 40,482 \qquad \chi^2_{0,025} = 83,298$$

quindi il valore osservato non cade nella regione di rifiuto.

Pertanto non si rifiuterà l'ipotesi nulla, ossia i dati osservati non sono difforni all'ipotesi che la varianza è pari a 22500.

Esercizio 5

Un docente vuole valutare gli effetti sul grado di preparazione dei propri studenti derivanti dall'adozione di un nuovo approccio didattico. A tal fine verifica se il voto medio conseguito all'esame finale dagli studenti frequentanti il corso è maggiore rispetto a quello degli studenti degli anni precedenti. Da un'analisi preliminare è noto che il voto all'esame conseguito dagli studenti degli anni precedenti è pari a 23,8. Relativamente ad un campione di 5 studenti che hanno seguito il corso secondo il nuovo approccio didattico, i voti conseguiti all'esame sono stati i seguenti:

23 25 28 26 27

Stabilire, assumendo un livello di significatività $\alpha=0.05$, se il nuovo approccio conduce ad un miglioramento del grado di preparazione degli studenti.

$$\mu_0 = 23,8$$

$$n = 5$$

$$\alpha = 0,05$$

$$\mu_1 = ?$$

23 25 28 26 27 $\rightarrow$ dobbiamo calcolare $\bar{x}$ e S^2

$$\bar{x} = \frac{23+25+28+26+27}{5} = 25,8$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} (23-25,8)^2 + (25-25,8)^2 \dots = 3,7$$

TEST MONODIREZIONALE

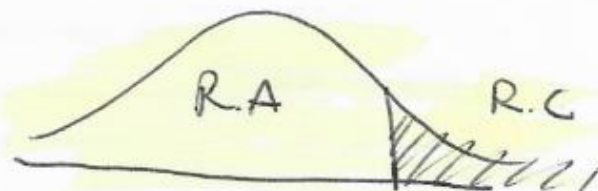
H_0 ipotesi nulla
 $\mu_1 = \mu_0$

riporteremo H_0 e accetteremo H_1
se $t > t_{\alpha}^{n-1}$

H_1 $\mu_1 > \mu_0$

Usiamo t perché σ ignota e $n < 30$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{S/n}} = \frac{25,8 - 23,8}{\sqrt{\frac{3,7}{5}}} = \frac{2}{0,86} \approx 2,326$$



$$t_{\alpha}^{n-1} = t_{0,05}^4 = 2,132$$

$2,326 > 2,132$? Sì! quindi rifiuto H_0