Errore di prima specie: rifiutare H_0 quando H_0 è vera. La probabilità che questo accada è indicata con α.

Errore di seconda specie: non rifiutare H_0 quando H_0 è falsa. La probabilità che questo accada è indicata con β.

In modo schematico avremo:

$$P(\text{rifiutare } H_0|H_0 \text{ vera}) = \alpha \qquad P(\text{accettare } H_0|H_0 \text{ falsa}) = \beta$$

Esempio di calcolo dell'errore di prima specie in un test unilaterale

Si vuole sottoporre a test l'affermazione di un produttore di vernici secondo cui il tempo medio di asciugatura di una nuova vernice è non superiore a $\mu = 20$ minuti. A questo scopo si prende un campione di 35 lattine di vernice, si effettuano 35 prove di verniciatura con la vernice delle diverse confezioni e si calcola il tempo medio di asciugatura, con l'intenzione di rifiutare l'affermazione del produttore se la media osservata supera il valore di 20 minuti, o di accettarla in caso contrario. Da tali prove emerge che il valor medio campionario e lo scarto quadratico medio del tempo di asciugatura della vernice sono rispettivamente $\overline{X} = 20,5$ e $\sigma = 2$ minuti. Calcolare l'errore di prima specie.

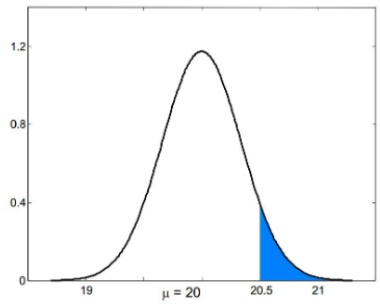
Le ipotesi da sottoporre a test sono:

1. $H_0 : \mu \leq 20$ minuti
2. $H_1 : \mu > 20$ minuti

La probabilità di commettere un errore del primo tipo è data da:

$$\alpha = P(\text{rifiutare } H_0|H_0 \text{ vera}) = P(\mu > 20,5|\mu \leq 20)$$

Sappiamo che la distribuzione della media campionaria per grandi campioni ($n \geq 30$) è approssimativamente normale, dunque la probabilità suddetta è data dall'area evidenziata in blu qui sotto.



Dunque, se il valore della media campionaria cade nella regione blu l'ipotesi nulla viene rifiutata, altrimenti non viene rifiutata.

Standardizzando il valore $\overline{X} = 20,5$ osservando che, per quanto detto prima, la deviazione standard della media campionaria è $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{20,5 - 20}{\frac{2}{\sqrt{35}}} = \frac{0,5}{0,34} = 1,47$$

Guardando le tavole della distribuzione normale possiamo finalmente calcolarci la probabilità di rifiutare erroneamente l'ipotesi nulla è:

$$\alpha = P(Z > 1,47) = 1 - P(Z < 1,47) = 1 - 0,9292 = 0,0708$$

Osservazione sull'errore di seconda specie

L'errore di seconda specie β è quantificabile solo fissando un valore per il parametro su cui si intende eseguire il test differente da quello specificato sotto l'ipotesi nulla e che sia in accordo con l'ipotesi alternativa.

Se nel primo esempio affrontato veniva richiesto di calcolare β supposta un'ipotesi alternativa con $\mu = 21,5$ minuti, avremmo calcolato la statistica test in questo modo:

$$Z = \frac{20,5 - 21,5}{\frac{2}{\sqrt{35}}} = \frac{-1}{0,34} = -2,94$$

e dunque la probabilità di accettare H_0 quando essa è falsa:

$$\beta = P(Z < -2,94) = 1 - P(Z < 2,94) = 1 - 0.9984 = 0,0016$$