

Variabile casuale uniforme (o rettangolare)

Le caratteristica principale è che le sue realizzazioni sono equiprobabili

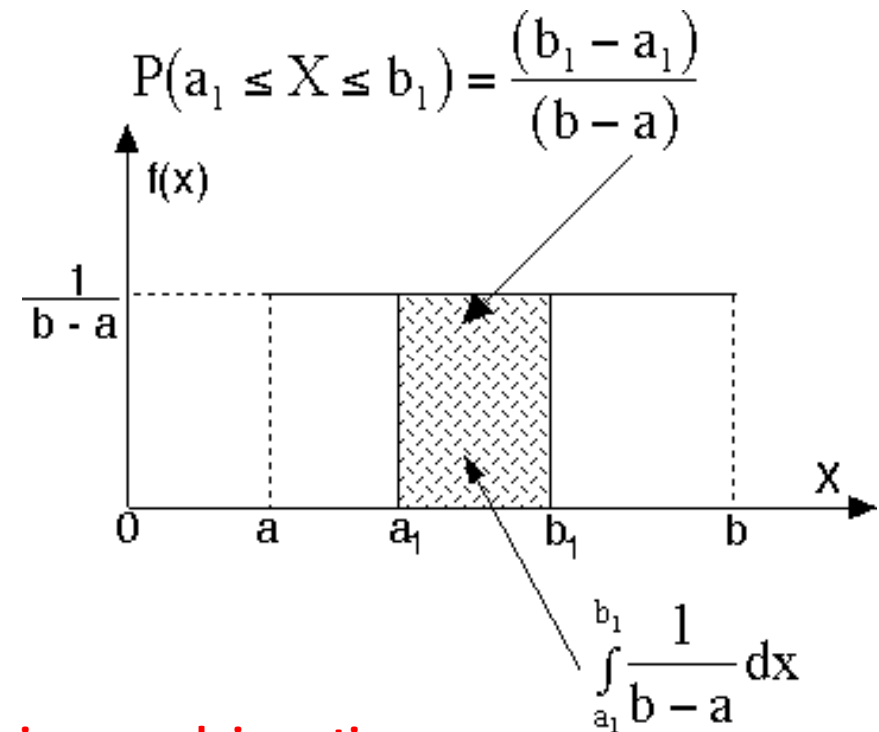
Si applica nelle situazioni in cui il fenomeno:



Assume valori in un intervallo limitato $[a, b]$



La probabilità di ogni sottointervallo di $[a, b]$ è proporzionale all'ampiezza del sottointervallo



La funzione di densità è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



In ciascuno dei punti appartenenti all'intervallo la probabilità è costante

$$X \sim U(a, b)$$

Funzione di ripartizione

$$F(k) = P(a \leq X \leq k) = \int_a^k \frac{1}{b-a} dx = \frac{k-a}{b-a}$$

Esempio

Gli autobus passano nei pressi dell'università ogni ora fra le 8.30 e le 13.30: calcolare la prob. che una persona, capitando a caso durante tale periodo, debba aspettare almeno un quarto d'ora

La v.c. X "tempo mancante al prossimo bus" segue un modello uniforme dato che "capitare a caso" significa che può capitare in uno qualsiasi dei 60 minuti:



$$\begin{aligned} P(x \geq 15) &= 1 - P(X < 15) = 1 - F(15) \\ &= 1 - \frac{15-0}{60-0} = 1 - 0.25 = 0.75 \end{aligned}$$

Valore atteso e varianza

$$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) = \frac{b+a}{2}$$

Nella v.c. UNIFORME il
v. atteso coincide con il
v. centrale del suo supporto

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{t^2}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Il tempo medio di attesa
alle pensiline è pari a:

$$E(X) = \int_0^{60} \frac{t}{60} dt = \frac{0+60}{2} = 30\text{min}$$

La variabile casuale esponenziale

Questa var. casuale deriva dalla Poisson e consente di rispondere a domande di questo tipo:

se una sequenza di eventi si verifica nel tempo secondo il modello di Poisson alla media di λ eventi per unità di tempo, quanto tempo bisogna aspettare perché si verifichi il primo?

Riconsideriamo la Poisson per l'arrivo di clienti ad uno sportello bancario:

$$f(X) = \frac{(\lambda t)^x \cdot e^{-\lambda t}}{x!} \quad \left\{ \begin{array}{l} X \text{ è il n° di clienti nell'unità di tempo} \\ E(X) = \lambda t \quad \text{media di arrivi} \\ \text{Var}(X) = \lambda t \quad \text{varianza degli arrivi} \end{array} \right.$$

Indichiamo con T il tempo trascorso fino all'arrivo del primo cliente, ovvero quello che intercorre tra un cliente ed un altro:

➡ T è una var. casuale continua che assume valori tra zero e infinito

Costruiamo la funzione di probabilità

Vediamo ora come calcolare la probabilità: il primo evento si verifica dopo un tempo t (cioè $T > t$), cioè deve trascorrere un tempo t prima che entri un altro cliente in banca...



Tale evento si realizza se nell'arco di tempo t non ci sono occorrenze, cioè se la v. casuale di Poisson è $x=0$, ma è anche vero il contrario: il n° di arrivi in un arco di tempo t è zero ($x=0$) se il primo arrivo si verifica al tempo $T > t$

$$P(T > t) \rightarrow P(X = 0) = \frac{(\lambda t)^0 \cdot e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

$$P(T \leq t) + P(T > t) = 1 \rightarrow P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{per } t \geq 0$$



**Funzione di ripartizione della
variabile esponenziale**

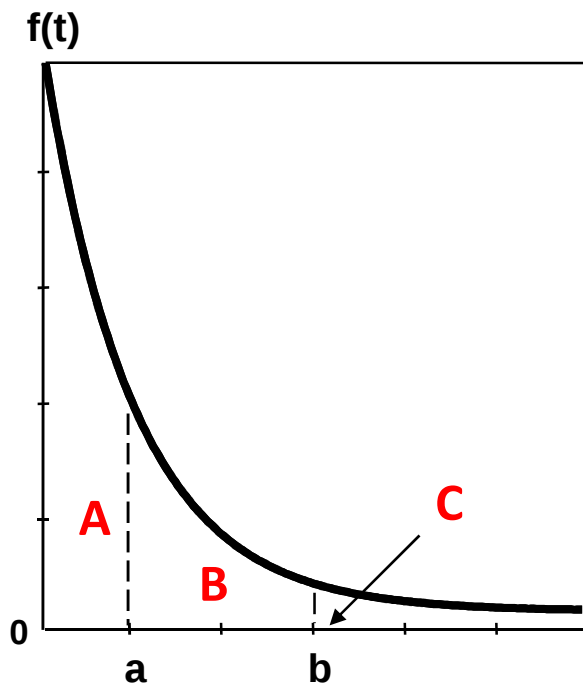
Funzione di probabilità

È possibile ricavare la funzione (di densità) di probabilità a partire dalla funzione di ripartizione ottenendo

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$



A) $P(T \leq a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$

B) $P(a \leq T \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt =$
 $= F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

C) $P(T \geq b) = 1 - F(b) = e^{-\lambda b}$

Esempio (1)

I clienti di un ipermercato arrivano alle entrate secondo un modello di Poisson ad una media di $\lambda = 4$ al minuto:



$$P(X = x) = \frac{4^x \cdot e^{-4}}{x!} \quad X = \text{numero di clienti in un dato minuto}$$

Quanto tempo occorre aspettare dopo l'apertura prima che entri il 1° cliente?
Il tempo di attesa è una var. casuale che si distribuisce secondo una legge di tipo esponenziale

$$P(X = x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} = 4 \cdot e^{-4x} \quad x > 0$$

Ad esempio la probabilità di aspettare meno di mezzo minuto è

$$F(0,5) = 1 - e^{-4 \cdot 0,5} = 1 - e^{-2} = 0,864$$

Esempio (2)

Si supponga che un corriere effettui le consegne secondo una legge poissoniana al ritmo di 4 consegne ogni ora. Il numero di consegne nell'unità di tempo ha come funzione di probabilità



$$P(X = x) = \frac{(4t)^x \cdot e^{-4t}}{x!} \rightarrow \text{con una media di } 4t \text{ consegne ogni } t \text{ ore}$$

Vogliamo calcolare qual è la probabilità che un certo cliente debba aspettare meno di un quarto d'ora prima che il corriere arrivi

Dai dati possiamo ricavare che $\lambda = 4/60 = 1/15$ quindi in generale si ha che la probabilità che il corriere arrivi in meno di t minuti è data da

$$P(\text{arrivi in meno di } t') = F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{15}}$$

$$P(T \leq 15) = F(15) = 1 - e^{-\frac{15}{15}} = 1 - e^{-1} = 0,632$$

Valore atteso e varianza

Il valore atteso di una variabile casuale esponenziale può essere calcolata secondo la formula:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$



**È l'inverso della media
di una Poisson**

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[t - \frac{1}{\lambda} \right]^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

Esercizio

Il monitor di una linea di televisori ha una durata di vita che si distribuisce secondo una legge esponenziale di parametro λ



Supponiamo che un televisore abbia una garanzia di 2 anni e che la probabilità che si guasti entro la fine del periodo di copertura sia pari al 18%: qual è la durata media del televisore?

$$P(T \leq 2) = 1 - e^{-2\lambda} = 0,18$$

➔ è possibile ricavare λ , l'unico valore incognito di questa relazione attraverso una semplice formula inversa

① $e^{-2\lambda} = 0,82$

② $-2\lambda = \ln(0,82)$

③ $\lambda = -\frac{\ln(0,82)}{2}$

④ $\lambda \cong 0,1 \quad \rightarrow \quad E(t) = \frac{1}{\lambda} = 10$

Qual è la probabilità che il televisore abbia una vita superiore ai 15 anni?

$$P(T > 15) = e^{-15 \cdot 0,1} = 0,223$$