

Distribuzione di Poisson



Una v. casuale di Poisson è una v. casuale discreta che può assumere qualsiasi valore intero non-negativo

E' un modello probabilistico adoperato per rappresentare situazioni di conteggio del n° di occorrenze di certi eventi in una unità di tempo o più precisamente n° di “successi” in un certo intervallo continuo (di tempo, di superficie, di lunghezza)

Può essere derivata in due diversi contesti

1 DA PROVE BERNOULLIANE

Quando si considerano moltissime prove ciascuna con probabilità di successo molto piccola (forma limite della binomiale per $n \rightarrow \infty$ e $\pi \rightarrow 0$)

2 DA EVENTI TEMPORALI

Ripetizione di un evento in un intervallo di tempo formato da subintervalli più piccoli

**Possibili
applicazioni**

{ Teoria delle code
N° di interruzioni di energia elettrica in un anno
N° di errori tipografici in uno scritto
N° di clienti entrati in un negozio in un dato periodo

IPOTESI BASE DELLA POISSON

Si assuma che un intervallo sia diviso in un numero molto grande di sottointervalli, di modo che la probabilità del verificarsi di un evento in ogni sottointervallo sia molto piccola. Le ipotesi di base della Poisson sono:

1. La probabilità del verificarsi di un evento è costante per tutti i sottointervalli.
2. L'evento non si può verificare più di una volta in ciascuno dei sottointervalli.
3. Eventi che si verificano in intervalli disgiunti sono indipendenti.

Dalla Binomiale alla Poisson

Consideriamo in un modello binomiale la probabilità di successo in rapporto al numero di prove $\pi = \frac{\lambda}{n}$ con $0 < \lambda < n$

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \dots = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Si dimostra che al crescere del numero delle prove, con una probabilità di successo in ogni singola prova molto piccola, la distribuzione Binomiale può essere approssimata con la distribuzione di Poisson

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

(con $0 < \lambda < \infty$)

$$\longrightarrow \boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$$

Esempi

Il numero di guasti che in un anno si verificano in una centralina telefonica si distribuiscono secondo la legge di Poisson, con $\lambda=3$. Qual è la probabilità che in un anno si verifichino tre guasti?



$$P(X = 3) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = \frac{27 \cdot 0,0497}{6} = 0,224$$

Il titolare di una pasticceria rinomata per i suoi tortini alle fragole sta tenendo sotto controllo il ciclo di produzione per verificare quante ne vengono inserite su ogni tortino. Supponendo che tale numero segua una distribuzione Poissoniana con $\lambda=6$, qual è la probabilità che in un particolare tortino si trovino esattamente cinque fragole?



$$P(X = 5) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{6^5}{5!} e^{-6} = \frac{7776 \cdot 0,0024}{120} = 0,155$$

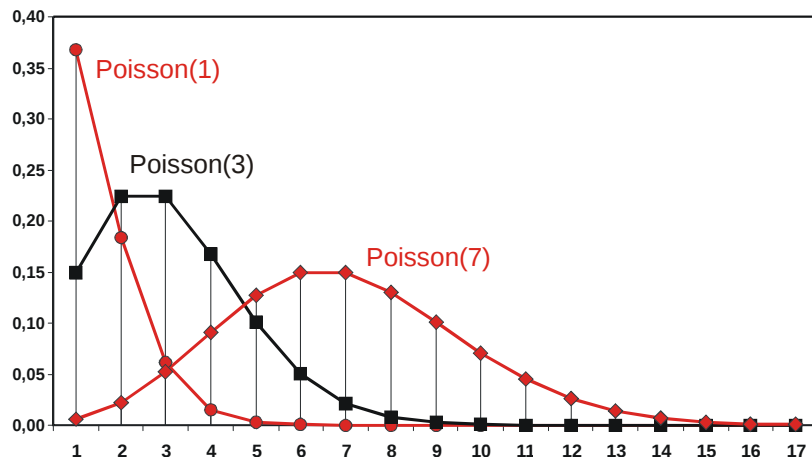
Valore atteso e Varianza

E' possibile dimostrare che il valore atteso e la varianza di una v. casuale di Poisson sono uguali tra loro e pari a λ

$$E(X) = \lambda \quad \text{VAR}(X) = \lambda$$

Il parametro caratteristico della legge distributiva Poissoniana è quindi espressione sia del valore medio che della variabilità della distribuzione:

*In una centralina telefonica **mediamente** in un anno si verificano 3 guasti: se il numero di guasti si distribuisce secondo la legge di Poisson, qual è la probabilità di avere in un anno x guasti?*



Al crescere di λ la distribuzione della variabile X è sempre più schiacciata e il centro spostato verso destra

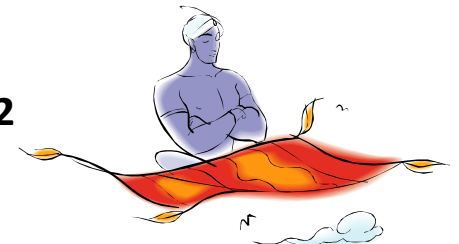
Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione quantifica la probabilità di avere un numero di occorrenze (eventi nell'unità di tempo) inferiore ad una data soglia

$$F(x) = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Esempio

Si supponga che il numero di imperfezioni per metro² in un tappeto segua la legge di Poisson con $\lambda=2,2$:



qual è la probabilità di avere al più 2 imperfezioni per metro quadro?

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \sum_{k=0}^2 \frac{2,2^k e^{-2,2}}{k!} = \frac{2,2^0 e^{-2,2}}{0!} + \frac{2,2^1 e^{-2,2}}{1!} + \frac{2,2^2 e^{-2,2}}{2!} = \\ &= 0,11 + 0,24 + 0,27 = 0,62 \end{aligned}$$

Eventi temporali

La v.c. di Poisson esprime la probabilità che in una data unità di tempo si ripetano un certo numero di eventi

Un telefono può squillare (successo) o meno (insuccesso) in ogni istante: supponiamo che suoni, in media, 5 volte in un ora



Se dividiamo l'intervallo in 60 parti uguali otteniamo degli intervalli di 1' per i quali il numero medio di chiamate è pari a 5

Pensiamo agli “intervallini” come prove Bernoulliane in cui la prob. di successo è $\pi=5/60$

prob. arrivo 3 chiamate $\rightarrow P(X = 3) = \binom{60}{3} \left(\frac{5}{60}\right)^3 \left(\frac{55}{60}\right)^{57} = 0,139$

Se dividiamo ogni intervallo di un minuto in 60 secondi allora avremo 3600 “prove” con una prob. di successo pari a $\pi=5/3600$... Continuando a frazionare l'unità di tempo si può approssimare la distribuzione con la Poissoniana

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

in t periodi è in media λt

Dalla Binomiale alla Poisson (2)

La Poisson, oltre ad essere importante di per sé, è molto utile per approssimare la distribuzione di probabilità della Binomiale

Se X è una v.c. Binomiale con probabilità di successo π ed n è un numero molto grande si ha

$$P(X=x) = \binom{n}{x} (\pi)^x (1-\pi)^{n-x} \cong \frac{(n\pi)^x}{x!} e^{-(n\pi)}$$

L'approssimazione:
→ è discreta se $n \geq 20$ e $\pi \leq 0.05$
→ è ottima se $n \geq 100$ e $n \cdot \pi \leq 10$

La probabilità di soffrire degli effetti collaterali di un vaccino anti influenzale è del 5 per mille. Supponendo che il vaccino sia somministrato a 1500 persone, determinare la prob. che non più di una persona subisca effetti collaterali



$$P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^1 \binom{1500}{x} (0.005)^x (0.995)^{1500-x}$$
$$= 0.00463$$



$$\lambda = n \cdot p = 1500 \cdot 0.005 = 7.5$$

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{7.5^0 \cdot e^{-7.5}}{0!} + \frac{7.5^1 \cdot e^{-7.5}}{1!} = 0.00470$$

Esercizi

1)

E' noto che il 30% dei pezzi difettosi prodotti in una determinata fase produttiva può essere migliorato. Su 6 pezzi difettosi estratti a caso:

- a. Qual è la probabilità che almeno 3 possono essere migliorati?
- b. Qual è la probabilità che nessuno dei 6 pezzi difettosi può essere migliorato?
- c. Qual è la probabilità che tutti possono essere migliorati?

2)

Il numero medio di denunce in un'ora inoltrate ad una Compagnia di Assicurazioni per smarrimenti è di 3,1: qual è la probabilità che in una data ora siano inoltrate

- a. meno di 3 denunce?
- b. esattamente 3 denunce?
- c. almeno 3 denunce?
- d. più di 3 denunce?