

## IL CONCETTO DI VARIABILE CASUALE

Associare una misura di probabilità al verificarsi di un certo evento (come esito di un esperimento) non sempre è sufficiente a risolvere gran parte dei problemi reali con connotati di incertezza

Talvolta studiando un certo fenomeno aleatorio si è più interessati a una qualche *funzione* dei possibili esiti piuttosto che agli esiti stessi

*Consideriamo un esperimento dato dal lancio di due dadi:*

E' possibile calcolare, ad esempio, la probabilità che la somma delle due facce sia un numero pari, o un numero dispari, o sia esattamente uguale a sette, e così via...



Possiamo considerare tutti i possibili risultati del lancio dei due dadi allo stesso tempo?

**E' NECESSARIO RICORRERE ALLE VARIABILI CASUALI**

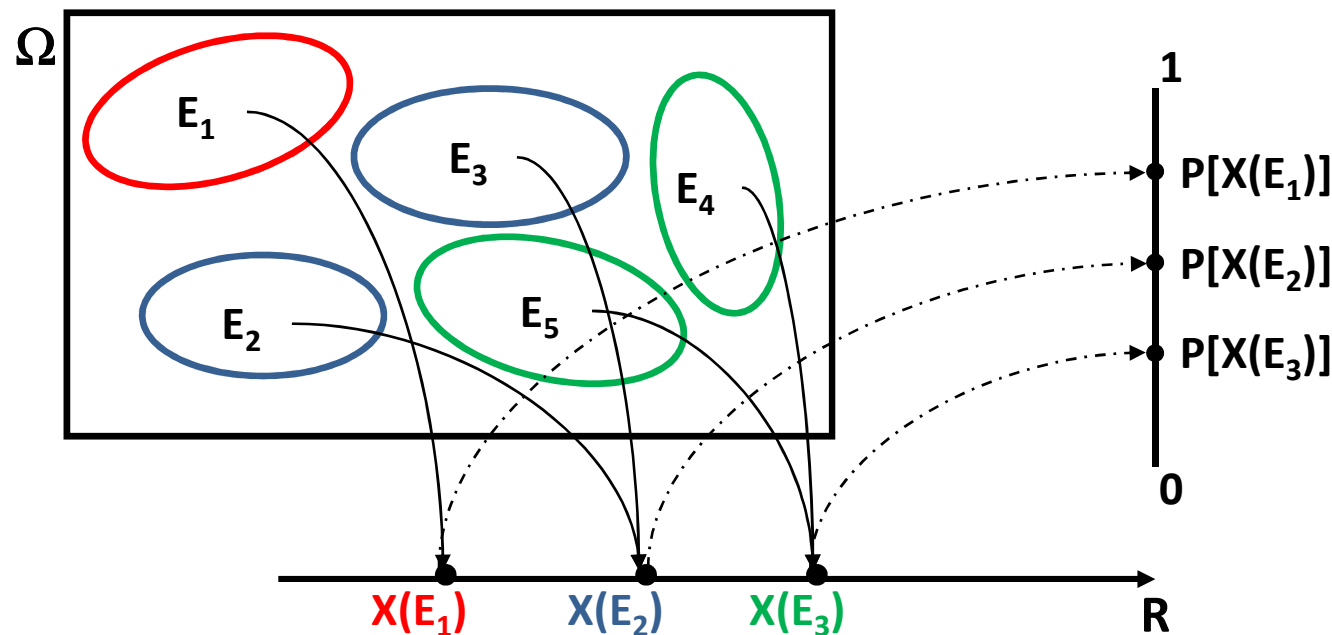
# Variable casuale

**→ Corrispondenza tra eventi e valori della variabile casuale X  
“somma dei punteggi”, nella prova “lancio di due dadi”**

|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                       |                                                                                       |                                                                                     |                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
|    | .....                                                                               | .....                                                                               | .....                                                                                 | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 2$  |
|    |    | .....                                                                               | .....                                                                                 | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 3$  |
|    |    |    | .....                                                                                 | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 4$  |
|    |    |    |    | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 5$  |
|    |    |    |    |    | .....                                                                               | $\rightarrow X = 6$  |
|    |    |    |    |    |  | $\rightarrow X = 7$  |
|  |  |  |  |  | .....                                                                               | $\rightarrow X = 8$  |
|  |  |  |  | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 9$  |
|  |  |  | .....                                                                                 | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 10$ |
|  |  | .....                                                                               | .....                                                                                 | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 11$ |
|  | .....                                                                               | .....                                                                               | .....                                                                                 | .....                                                                                 | .....                                                                               | $\rightarrow X = 12$ |

# Definizione

Una *variabile causale* (o aleatoria) è una variabile che assume valori numerici in corrispondenza dei diversi risultati di un esperimento casuale (o aleatorio)



Una v. casuale  $X$  è una funzione definita sullo spazio campionario  $\Omega$  che associa ad ogni evento  $E \subset \Omega$  un unico numero reale

# Variabili casuali discrete e continue

- Una var. casuale **discreta** può assumere un insieme discreto (finito o numerabile) di numeri reali
- Una var. casuale **continua** può assumere tutti i valori compresi in un intervallo reale

## ESEMPI

1. N° di pezzi difettosi in un campione di 20 pezzi estratti da un certo lotto
2. N° di clienti che arrivano in un'ora, alla cassa di un supermarket
3. N° di richieste d'indennizzo, in un anno, relative ad una certa polizza

1. Reddito annuo di una famiglia
2. Quantità di petrolio importata in Italia in un certo mese
3. Variazione del prezzo di un'azione o di un indice di borsa telematico
4. Utili di una certa azienda o società

**N.B.:** Ci sono alcune grandezze di interesse economico-aziendale che vengono trattate come fossero in realtà continue

# Var. casuali discrete finite e numerabili

Dalla precedente definizione segue:

- (1) Una variabile casuale  $X$  è discreta se può assumere solo un numero finito di valori

*ES. n° di teste risultanti da 10 lanci di una moneta*



- (2) Una variabile casuale  $X$  è discreta anche quando il numero di possibili risultati è infinito ma numerabile

*ES. n° di lanci necessari per osservare testa per la prima volta*



# Calcolare la probabilità

$P(X=x_i)$   Probabilità che la v.c.  $X$  assuma il valore  $x_i$

La ***funzione di probabilità*** di una variabile casuale discreta  $X$  associa ad ognuno dei possibili valori  $x_i$  la corrispondente probabilità  $P(X=x_i)$

Valgono le seguenti due proprietà:

- 1)  $\sum P(x_i) = 1$
- 2)  $P(x_i) \geq 0$

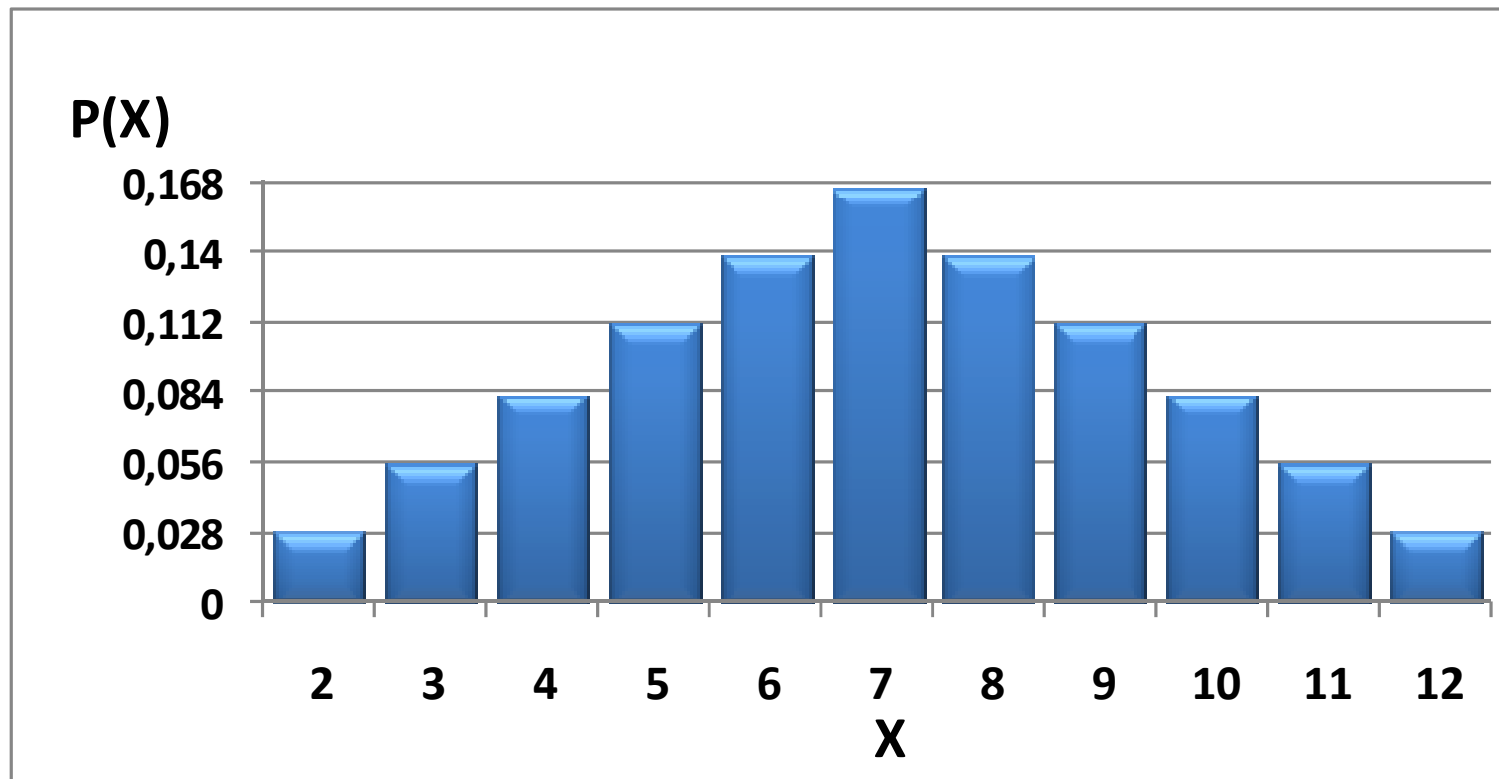
## **IMPORTANTE**

Dal punto di vista della notazione si utilizzano le lettere maiuscole per indicare la v.c. (es.  $X$ ) e la corrispondente lettera minuscola (es.  $x$ ) per indicare una sua realizzazione

# Distribuzione di probabilità (1)

➔ Associando a ciascun valore della variabile casuale la probabilità corrispondente si ottiene la **distribuzione di probabilità**:

| $x$    | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |



## Distribuzione di probabilità (2)

Si osservi come i risultati possibili dell'esperimento siano 36 mentre la v.c. può invece assumere 11 possibili valori distinti



si ha maggiore facilità di trattazione se agli eventi si associano delle quantità numeriche

Poiché ogni evento elementare ha probabilità  $1/36$ , si avrà:

$$P(X=2) = P[(1,1)] = 1/36$$

$$P(X=3) = P[(1,2) \text{ o } (2,1)] = 2/36$$

Come facciamo a calcolare la probabilità che lanciando due dadi il risultato sia, ad esempio, inferiore a 4?

# Funzione di ripartizione (1)

Si introduce la **funzione di ripartizione** quando si è interessati alle **probabilità cumulate**, ossia alla probabilità che la v.c.  $X$  assuma un valore minore o uguale ad un dato valore  $x_i$

Data una v.c discreta  $X$ , la funzione che fa corrispondere ai valori  $x$  le probabilità cumulate

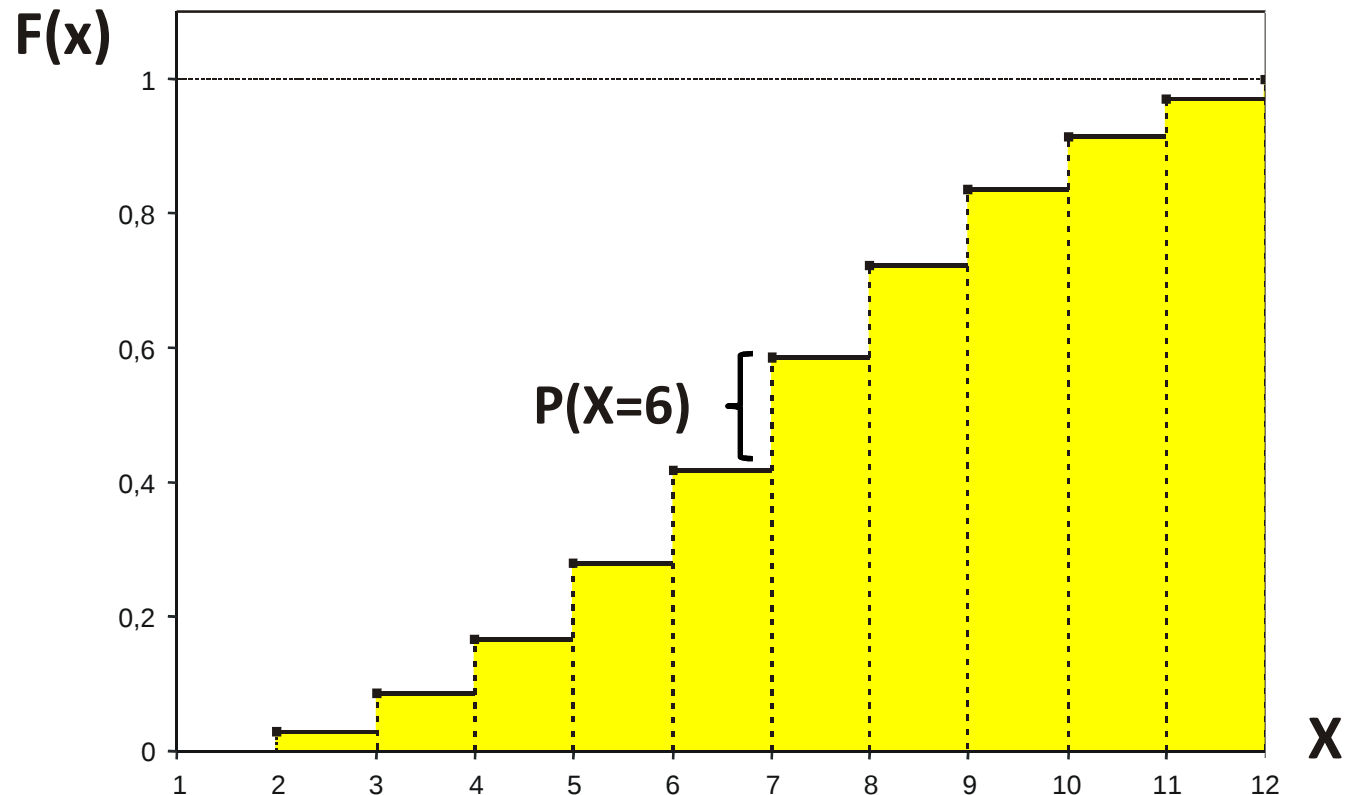
$$P(X \leq x_k)$$

viene detta **funzione di ripartizione** ed indicata con

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = P(x_1) + \dots + P(x_k) = \sum_i P(X = x_i)$$

# Funzione di ripartizione (2)

| $x$    | 2              | 3              | 4              | 5               | 6               | 7               | 8               | 9               | 10              | 11              | 12             |
|--------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| $P(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$  | $\frac{5}{36}$  | $\frac{6}{36}$  | $\frac{5}{36}$  | $\frac{4}{36}$  | $\frac{3}{36}$  | $\frac{2}{36}$  | $\frac{1}{36}$ |
| $F(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{15}{36}$ | $\frac{21}{36}$ | $\frac{26}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{33}{36}$ | $\frac{35}{36}$ | <b>1</b>       |



# Esempio

*Consideriamo un esperimento casuale dato dal lancio di tre monete*

Lo spazio campionario è dato da:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{llll} E_1 = CCC & E_2 = CTT & E_3 = CCT & E_4 = TCC \\ E_5 = TCT & E_6 = CTC & E_7 = TTC & E_8 = TTT \end{array} \right\}$$

Se consideriamo l'evento  $E_2$  e vogliamo costruire la var. casuale "*n° di teste uscite nel lancio di tre monete*" allora avremo

$$E_2 = T \cap T \cap C \quad \longrightarrow \quad X = 2$$

Anche per  $E_5$  e  $E_7$  si ottiene  $X = 2$ , quindi si può scrivere la probabilità che siano uscite 2 teste come

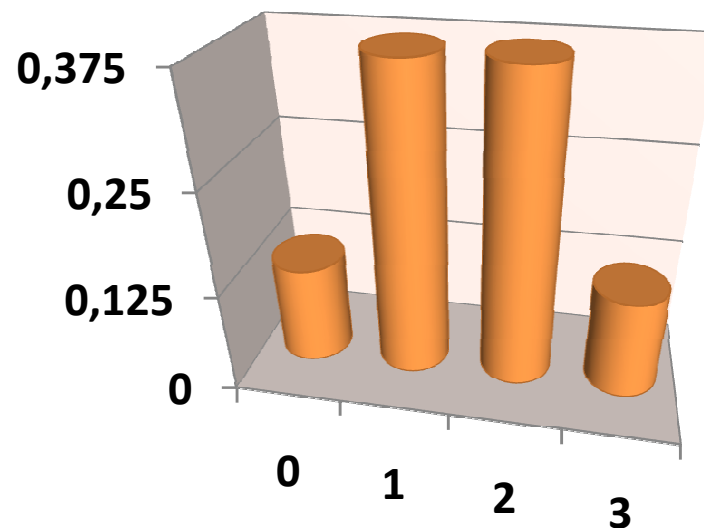
$$P(X = 2) = E_2 \cup E_5 \cup E_7 = P(E_2) + P(E_5) + P(E_7) = 3/8$$



*Il valore assunto da  $X$  non è noto a priori e perciò è detta var. casuale*

Deriviamo ora la distribuzione di probabilità della var.  $X$ :

|                         | $X$ | $P(x)$ |
|-------------------------|-----|--------|
| $E_1 = C \cap C \cap C$ | 0   | 1/8    |
| $E_2 = C \cap T \cap T$ | 1   | 3/8    |
| $E_3 = C \cap C \cap T$ | 1   | 3/8    |
| $E_4 = T \cap C \cap C$ | 1   | 3/8    |
| $E_5 = T \cap C \cap T$ | 2   | 3/8    |
| $E_6 = C \cap T \cap C$ | 2   | 3/8    |
| $E_7 = T \cap T \cap C$ | 2   | 3/8    |
| $E_8 = T \cap T \cap T$ | 3   | 1/8    |



Qual è la probabilità che lanciando tre monete si ottengano al più 2 teste?

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 7/8$$